Bruchrechnung

1 Formveränderung von Brüchen

Erweitern heißt Zähler und Nenner eines Bruches mit der selben Zahl multiplizieren. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Kürzen heißt Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividieren. $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$

Beachte: Man darf mit 0 weder erweitern noch kürzen.

Ü: 1.1 Kürze soweit wie möglich: a) $\frac{18}{20}$ b) $\frac{120}{54}$ c) $\frac{180}{105}$ d) $\frac{9 \cdot 4 \cdot 36}{6 \cdot 27 \cdot 12}$

1.2 Erweitere auf den Nenner in der Klammer: a) $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{8}{5}$; (20) b) $\frac{10}{9}$; $\frac{12}{27}$; $\frac{3}{2}$; (54)

2 Addition und Subtraktion gemeiner Brüche

Regel:
- Man bestimmt den Hauptnenner und macht die Brüche gleichnamig.
- Man addiert bzw. subtrahiert die Zähler.
- Man behält den gemeinsamen Nenner bei.

z. B.: $\frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + \frac{20}{12} - \frac{6}{12} = \frac{9 + 20 - 6}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$

Ü: 2a) $\frac{7}{12} + \frac{11}{12} - \frac{1}{12} =$ b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{23}{18} =$ c) $\left(\frac{1}{5} + \frac{9}{11}\right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{11}\right) =$ d) $5\frac{2}{9} - \left[3\frac{4}{5} - \left(1\frac{2}{15} + \frac{4}{5}\right)\right] =$

3 Multiplikation gemeiner Brüche

Regeln: Bruch mal Bruch
- Man multipliziert Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.
- Gemischte Zahlen werden vorher in unechte Brüche umgewandelt.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ z. B.: $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{21} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 21} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 7} = \frac{1}{14}$

Bruch mal ganze Zahl
- Man verwandelt die ganze Zahl in einen Bruch mit dem Nenner 1 und verfährt nach obiger Regel. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}$

Ü: 3a) $\frac{5}{4} \cdot 8 =$ b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{27} =$ c) $8\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} =$ d) $12 \cdot \frac{4}{3} =$

4 Division gemeiner Brüche

Regel:
- Man bildet den Kehrwert des zweiten Bruches und multipliziert anschließend die beiden Brüche.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ z. B.: $\frac{4}{9} : \frac{5}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$

Ü: 4a) $\frac{4}{11} : \frac{12}{33} =$ b) $2\frac{1}{3} : \frac{7}{8} =$ c) $5\frac{1}{9} : \frac{2}{3} =$ d) $1\frac{6}{7} : 2\frac{1}{3} =$

Bruchrechnung

5 Umwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche

Regel:
- Man wandelt einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch um, indem man den **Bruchstrich** durch ein **Divisionszeichen** ersetzt und den Zähler durch den Nenner dividiert.

  z. B.: $\frac{7}{8} = 7:8 = 0{,}875$ $1\frac{5}{9} = \frac{14}{9} = 1{,}5555... = 1{,}\overline{5}$

Ü: 5a) $\frac{18}{25}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{13}{8}$ d) $\frac{11}{50}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{8}{15}$

6 Umwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche

6.1 Endliche Dezimalbrüche

Regel:
- Im Zähler steht die Zahl aus allen Dezimalen.
- Im Nenner steht die entsprechende Stufenzahl.
- Die Ganzen werden gesondert umgewandelt.

  z. B.: $0{,}16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$ $3{,}41 = 3\frac{41}{100} = \frac{341}{100}$

Ü: 6.1a) 0,25 b) 0,125 c) 0,0325 d) 3,58 e) 4,2 f) 10,35

6.2 Unendlich periodische Dezimalbrüche

Regel:
- Im Zähler steht die Periode.
- Im Nenner steht eine Zahl, die aus so vielen Ziffern 9 besteht wie die Länge der Periode vorgibt.

  z. B.: $0{,}\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $0{,}\overline{002} = \frac{2}{999}$

(Die Regel gilt nur, wenn die Periode sofort nach dem Komma beginnt!)

Ü: 6.2a) $0{,}\overline{2}$ b) $0{,}\overline{6}$ c) $0{,}\overline{21}$ d) $3{,}\overline{43}$ e) $0{,}\overline{09}$ f) $0{,}\overline{124}$

7 Runden von Dezimalbrüchen

Regel: Bei sehr langen oder unendlichen Dezimalbrüchen genügt häufig ein gerundeter Näherungswert der Zahl. Dafür gilt folgendes:

Abrunden: Die zu rundende Ziffer bleibt unverändert, wenn eine der Ziffern 0 - 4 folgt.
Aufrunden: Die zu rundende Ziffer wird um 1 erhöht, wenn eine der Ziffern 5 - 9 folgt.

Vor dem Runden ist festzustellen, auf welche Stelle gerundet werden soll und die folgende Ziffer ist die entscheidende.

z. B.: 123,8 (G) = 124 6,983 (h) = 6,98 12,057 (z) = 12,1

Ü: 7 Runde auf die angegebene Stelle nach dem Komma:

a) 67,2345 (h) b) 7,987 (z) c) 123,354 (G) d) 2,009 (z)

Bruchrechnung

8 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

Regel:
- Man bringt die Dezimalbrüche durch Anhängen von Endnullen auf gleich viele Dezimalen.
- Man addiert bzw. subtrahiert Ziffern mit gleichem Stellenwert.

  z. B.: $23{,}4+2{,}345-0{,}71=23{,}400+2{,}345-0{,}710=25{,}035$

Ü: 8a) $24{,}812+30{,}4+18{,}5673=$ b) $12{,}98-4{,}0082+3{,}2-0{,}056=$

c) $(45{,}32+4{,}907)-(34{,}564-6{,}02)=$

9 Multiplikation von Dezimalbrüchen

Regel:
- Man multipliziert die beiden Dezimalbrüche zunächst ohne Komma.
- Man setzt das Komma so, dass das Ergebnis so viele Dezimalen besitzt wie beide Faktoren zusammen.
  z. B.: $4{,}5\cdot 0{,}3=1{,}35$

Ü: 9a) $32\cdot 0{,}024=$ b) $8{,}61\cdot 6{,}02=$ c) $1{,}5\cdot 1000=$ d) $0{,}02\cdot 0{,}3=$

10 Division von Dezimalbrüchen

Regel:
- Man verschiebt das Komma bei Dividend und Divisor um gleich viele Stellen soweit nach rechts bis der Divisor kommafrei ist.
- Man dividiert wie in $\mathbb{N}$.
- Man setzt das Komma im Ergebnis beim Überschreiten der Kommastelle beim Dividenden.

  z. B.: $4{,}97:3{,}5=49{,}7:35=1{,}42$

$$\begin{array}{rrr}
\underline{35} & & \\
14 & 7 & \\
\underline{14} & \underline{0} & \\
 & 7 & 0 \\
 & \underline{7} & \underline{0} \\
 & & 0
\end{array}$$

Ü: 10a) $230{,}88:2{,}4=$ b) $15{,}606:3{,}06=$ c) $624:0{,}06=$

Terme

1 Definition

- Jede Zahl — z. B.: 5; 0,12; $1\frac{2}{7}$; ...
- Jede Variable — z. B.: a; x; y; ...
- Jede sinnvolle Verknüpfung aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen — z.B.: $5+0,3\cdot 2,4$; $3\cdot x-7$; x^2-25; ...

bezeichnet man als **Term**.

Jeder Term, der eine Variable enthält, besitzt eine Grundmenge $\mathbb{G}$ für die Variable.

2 Darstellungsarten von Termen

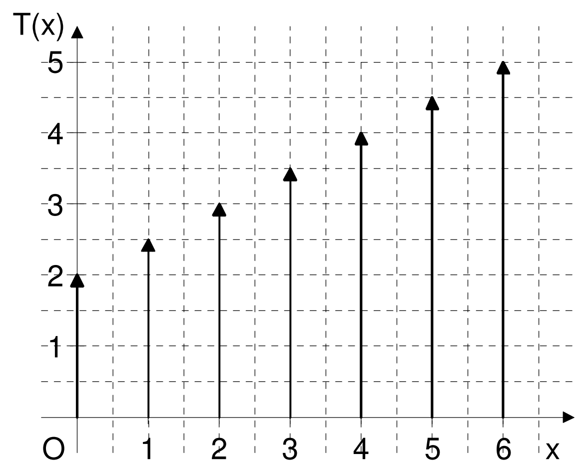
Wenn man für die Variable des Terms Zahlen der Grundmenge einsetzt, erhält man jeweils den dazugehörigen Termwert.
Terme kann man in numerischen und graphischen Wertetabellen darstellen:

Beispiel: $T(x)=0,5\cdot x+2$ $\quad\mathbb{G}=\{0;1;2;3;4;5;6\}$

2.1 Numerische Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6
$0,5\cdot x+2$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5

2.2 Graphische Wertetabelle



3 Äquivalente Terme

Terme sind **äquivalent** (gleichwertig), wenn sie bei **allen Einsetzungen aus der Grundmenge $\mathbb{G}$ jeweils die gleichen Termwerte haben**.

Beispiele:

1. $T_1(x)=20+4\cdot x$ und $T_1(x)=(5+x)\cdot 4$ $\quad\mathbb{G}=\{1;2;3\}$

   für x = 1 $\quad T_1(1)=24$ $\quad T_2(1)=24$
   für x = 2 $\quad T_1(2)=28$ $\quad T_2(2)=28$
   für x = 3 $\quad T_1(3)=32$ $\quad T_2(3)=32$
   Da die Termwerte für alle Einsetzungen gleich sind, sind die Terme äquivalent $\mathbf{T_1(x)=T_2(x)}$

2. $T_1(x)=x\cdot x$ und $T_1(x)=2\cdot x$ $\quad\mathbb{G}=\{0;1;2\}$

   für x = 0 $\quad T_1(0)=0$ $\quad T_2(0)=0$
   für x = 1 $\quad\mathbf{T_1(1)=1}$ $\quad\mathbf{T_2(1)=2}$
   für x = 2 $\quad T_1(2)=4$ $\quad T_2(2)=4$
   Da die Termwerte nicht für alle Einsetzungen nicht gleich sind, sind die Terme nicht äquivalent $\mathbf{T_1(x)\neq T_2(x)}$

Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

1 Äquivalenz von Gleichungen

Gleichungen (Ungleichungen), die bei **gleicher Grundmenge dieselbe Lösungsmenge** besitzen, heißen **äquivalent**.

Beispiel: $(5+x)\cdot 4 = 80$ ist äquivalent zu $20+4\cdot x = 80$ in $\mathbb{G} = \mathbb{Q}_0^+$,

da beide Gleichungen die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{15\}$ haben.

2 Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert.

Eine derartige Umformung heißt **Äquivalenzumformung**.

Beispiele: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}_0^+$

1.
$$2\cdot x + 1 = 5 \quad | -1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot x = 4 \quad |:2$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2$$
$$\mathbb{L} = \{2\}$$

2.
$$\frac{1}{3}\cdot x - 5 = 2 \quad | +5$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot x = 7 \quad | \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 21$$
$$\mathbb{L} = \{21\}$$

Zur Probe setzt man das Lösungselement ein und überzeugt sich, dass eine wahre Aussage entsteht!

$2\cdot \mathbf{2} + 1 = 5$ (wahre Aussage) $\qquad \frac{1}{3}\cdot \mathbf{21} - 5 = 2$ (wahre Aussage)

Ü: Löse durch Äquivalenzumformungen die Gleichungen mit $\mathbb{G} = \mathbb{Q}_0^+$

a) $x\cdot 10 = 4$

b) $x - \frac{4}{5} = 3\frac{1}{2}$

c) $2\cdot x + 3 = 18$

d) $1,2\cdot y - 0,3 = 4,5$

e) $(17-13)\cdot x + 6 = 11$

f) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot x = \frac{2}{3}$

g) $z : 1,6 = 2,4 + 9$